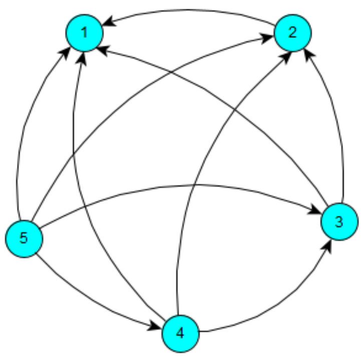
ГРАФ – појам и основне особине

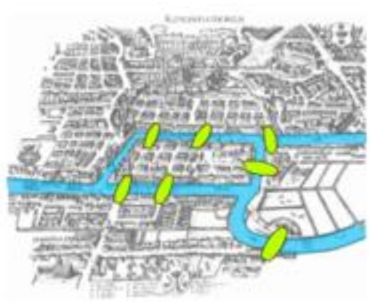
Граф је математички објекат који има доста примена у математици али и у другим областима. Већ сте га упознали у првом разреду када сте релацију представљали графичким приказом – графом.

Пример: На скупу $A = \{1,2,3,4,5\}$ релација је дата са $xRy \Leftrightarrow x > y$. Представи је графом.

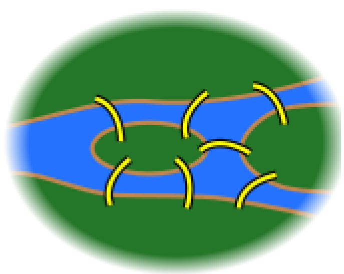
Решење:



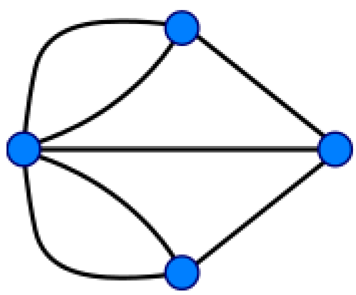
Ову област први је проучавао Ленард Ојлер, швајцарски математичар у XVIII веку. Прича каже да је поставио основе ове области математике када је решавао проблем Кенигсбершких мостова: да ли се може поћи из једне тачке и прећи свих 7 мостова – сваки по једном. Положај мостова је дат на слици:



Ојлер је ову слику упростио тако што је копно представио зеленом бојом а мостове жутом:



а затим још више тако што је зелене области заменио круговима и добио приказ:



Сада проблем гласи: можемо ли поћи из неког од кругова и прећи преко сваке од линија само по једном?

Приметимо да облик и дужина линија или положај кругова нема утицаја на решење овог проблема. Битно је само који круг је са којим повезан. Решење проблема је да то није могуће – видећемо касније зашто.

Дакле, граф се састоји од објеката – на слици кругова (зовемо их чворовима графа) и њихових веза - на слици линија (зовемо их ивицама графа).

Чворови могу бити било какви објекти а ивице су њихове везе. Скуп свих чворова обично обележавамо са V (енглески: vertices) а скуп свих ивица са E (енглески: edges) тако да математичка дефиниција графа гласи:

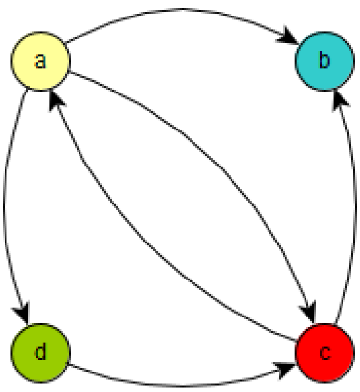
Граф G је дефинисан скупом чворова $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и скупом ивица $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, при чему свака од ивица представља уређени пар елемената скупа V тј. $E \subseteq V^2$.

Напомена: слика графа није неопходна али је често цртамо да би лакше уочили важна својства.

Пример:

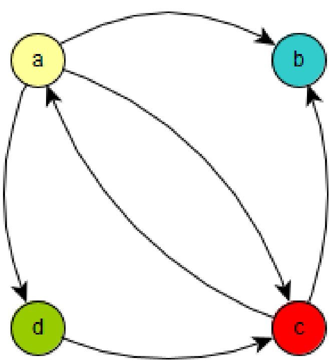
Дат је граф $G = (V, E)$ где је $V = \{a, b, c, d\}$ $E = \{(a,b), (a,c), (a,d), (c,a), (c,b), (d,c)\}$. Представи граф цртежом.

Решење:

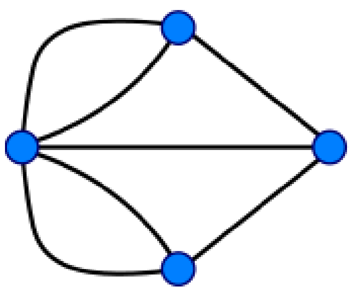


Из неколико примера које смо показали види се да граф може имати различите типове ивица: једносмерне, двосмерне, без обележја, са обележјем (погодно ако би хтели да направимо граф који приказује различите путеве између места а да се на сваком од путева види његова дужина),…

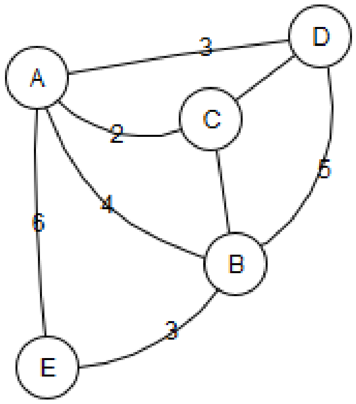
- Ако граф има коначно много чворова кажемо да је **коначан** а иначе да је **бесконачан.**
- Ако ивице графова имају смер за граф кажемо да је **оријентисан**. Веза између чворова је једносмерна.



- Ако ивице графова немају смер за граф кажемо да је **неоријентисан**. Веза између чворова је двосмерна. Другим речима, сваку од линија на слици посматрамо као да има стрелицу на оба краја.



- Ако ивице имају обележја (обично су то позитивни бројеви) за граф кажемо да је **тежински**.

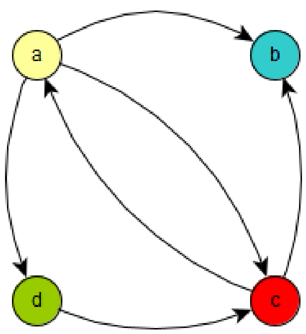


Ова област математике зове се теорија графова и нашла је примену у програмирању, рачунарским мрежама, географији, хемији, …

Да би скратили објашњења уводимо неке основне термине (називе):

почетни и крајњи чвор ивице: Ако је (A,B) ивица графа онда A зовемо почетни чвор те ивице а B крајњи чвор те ивице. Кажемо да ивица излази из чвора A и да улази у чвор B.

суседни чворови: A и B су суседни чворови ако постоји ивица којој је A почетни чвор а B крајњи чвор тј. (A,B)



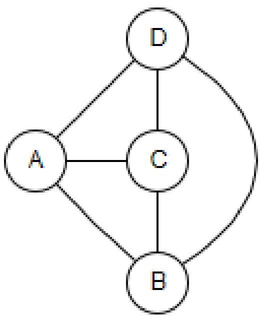
улазни степен чвора: улазни степен чвора A је број ивица које улазе у тај чвор тј. број ивица облика (X,A) где је X неки од чворова. На претходној слици улазни степен чвора са обележјем „a“ је 1, чвора са обележјем „b“ је 2.

излазни степен чвора: излазни степен чвора A је број ивица које излазе из тог чвора тј. број ивица облика (A, X) где је X неки од чворова. На претходној слици излазни степен чвора са обележјем „a“ је 3, чвора са обележјем „b“ је 0.

степен чвора: степен чвора је збир његовог улазног и излазног степена. На претходној слици степен чвора са обележјем „a“ је 4 (1+3), чвора са обележјем „b“ је 2 (2+0).

регуларан граф: граф је регуларан степена k ако сви његов чворови имају степен k.

Пример: регуларан граф степена 3 може изгледати овако



пут: пут дужине k је низ ивица $e_1, e_2, \dots, e_k$ таквих да је крајњи чвор ивице e_i исти као почетни чвор ивице e_{i+1} за $i = 1,2, \dots, k-1$. Кажемо да тај пут повезује почетни чвор e_1 са крајњим чвором e_k. У претходном примеру $(\mathrm{A}, D), (D, C), (C, B)$ је пут дужине 3 који повезује A са B.

петља: ивица која повезује чвор са самим собом тј. ивица којој је почетни и крајњи чвор исти.

контура или **циклус**: пут који повезује два иста чвора. У претходном примеру пут $(A, D), (D, C), (C, A)$ је контура или циклус.

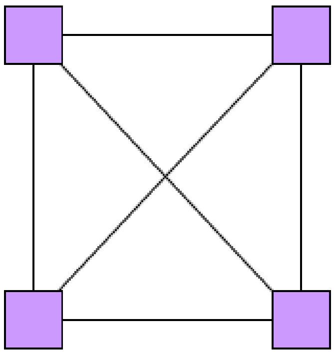
прост граф: граф без петљи.

повезан граф: граф је повезан ако за свака два чвора постоји пут који их повезује.

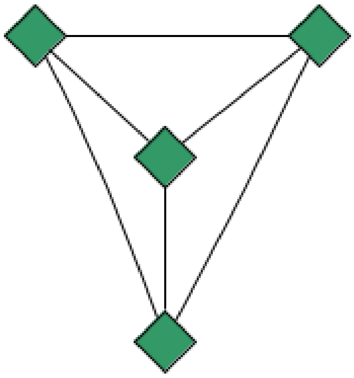
планаран граф: прост граф који може да се нацрта у равни тако да се ивице секу само у чворовима.

комплетан или **потпун граф:** комплетан граф са n чворова је неоријентисан прост граф који има n чворова и свака два су повезана. Обележавамо га са K_n.

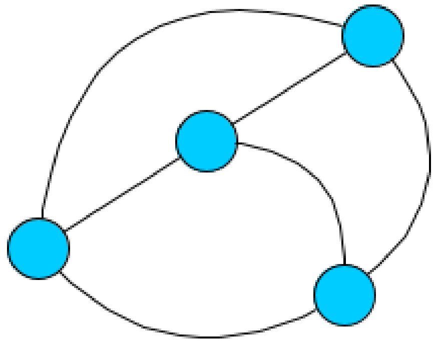
Пример: K_4 може изгледати



или



или



није планаран

(ивице се секу ван чвора)

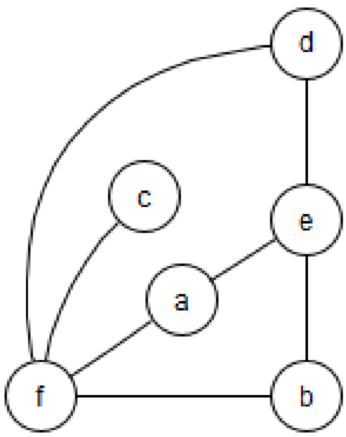
планаран

планаран

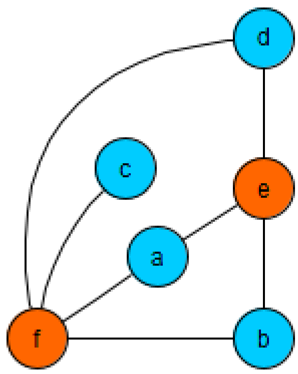
НАПОМЕНА: Задње две слике су различите али су особине јако сличне и једна се може добити од друге окретањем и растезањем. Ово је основа гране математике која се зове ТОПОЛОГИЈА. Управо то је користио Ојлер када је мапу града свео на граф приликом решавања проблема Кенигсбершких мостова!

бипаритивни граф: граф коме су чворови подељени у два подскупа (један има m а други n чворова) тако да свака од ивица повезује чвор из једног скупа са чвором из другог скупа. Обележавамо га са $K_{m,n}$.

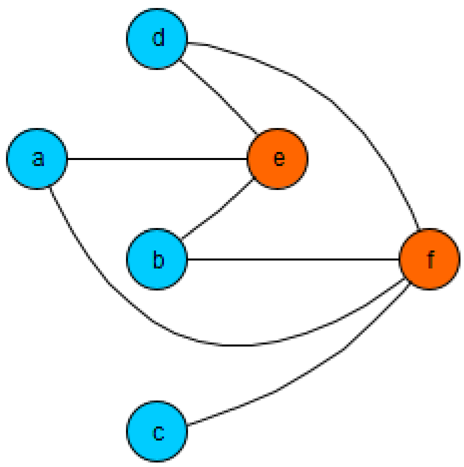
Пример: $K_{4,2}$ може изгледати



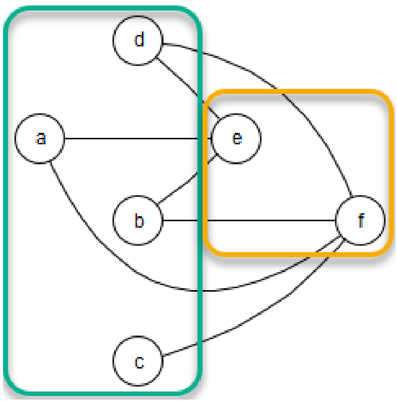
Са слике се на први поглед не види да имамо 4 чвора у једној групи (они нису међусобно повезани) и 2 чвора у другој групи (ни они нису међусобно повезани) и све ивице спајају један чвор из једне и један чвор из друге групе. Ако их обојимо онда се лакше уочава то својство



Чворове и ивице можемо померити (граф остаје исти јер нисмо мењали скуп чворова ни скуп ивица) па добити и овакву слику



Где се и без боја јасније уочавају два скупа чворова бипаритивног графа



подграф: подграф датог графа је граф коме су чворови подскуп скупа чворова датог графа а ивице подскуп скупа ивица датог графа.

Напомена: можемо комбиновати наведене појмове да би скратили објашњавање. На пример: прост повезан планаран граф.

Овде ћемо обрадити само неке од основних теорема и алгоритама за КОНАЧНЕ ПРОСТЕ графове.

Теорема 1. Збир степенова свих чворова у графу је два пута већи од броја ивица.

Доказ: Степен сваког чвора је број ивица које полазе из тог чвора. Када их сабирамо свака ивица се у том збиру појављује два пута (јер полази из једног чвора а завршава у другом). Дакле збир степенова јесте два пута већи од броја ивица. Q.E.D.

НАПОМЕНА: Q.E.D. је скраћеница од латинског израза *„quod erat demonstrandum“* (у преводу: „што је и требало доказати“). У науци (нарочито математици) користимо као ознаку за крај доказа.

Теорема 2. У простом графу број чворова непарног степена је паран.

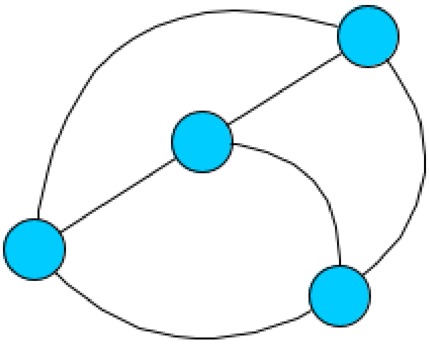
Доказ: Ако је граф прост онда се почетни и крајњи чвор сваке ивице разликује. Претпоставимо да постоји граф код кога теорема није тачна тј. у њему постоји непаран број чворова непарног степена и одређени број чворова парног степена. Онда би укупан збир степенова свих чворова био непаран (непаран број пута непаран и било који број пута паран = непаран број) што је по теореми 1 немогуће јер тај број мора бити два пута већи од броја ивица. Дакле, супротна претпоставка је немогућа па је теорема тачна. Q.E.D.

Теорема 3. У регуларном графу степена k са n чворова има $\frac{n \cdot k}{2}$ ивица.

Доказ: Ако је граф регуларан степена k са n чворова онда сваки од тих n чворова има степен k па је збир степенова nk. Теорема 1 тврди да је тај број два пута већи од броја ивица па је број ивица два пута мањи од тог броја односно $\frac{nk}{2}$. Q.E.D.

Теорема 4. (Ојлерова) Повезан, планаран граф са v чворова и e ивица дели раван на $e - v + 2$ области.

Пример:

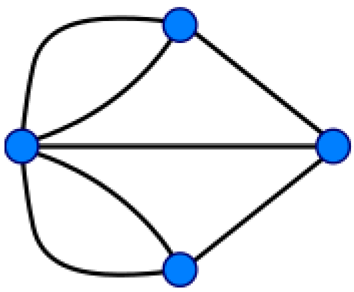


Овај граф дели раван на 4 области – спољашњост и три унутрашње области.

Број чворова је 4 ($v = 4$), број ивица је 6 ($e = 6$) тако да је формула тачна: $e - v + 2 = 6 - 4 + 2 = 4$

Ову теорему доказаћемо касније када научимо још неке појмове.

За крај ћемо показати зашто се не може решити проблем Кенигсбершких мостова.



Задатак се своди на конструисање пута који садржи све ивице графа. Један од чворова мора бити почетни. Из њега излазимо преко једне од ивица. Ако се касније у тај чвор вратимо онда он мора бити крај пута или из њега поново излазимо и настављамо пут. Разматрамо две ситуације:

а) тај чвор је почетак и крај пута и он је парног степен. Сви остали чворови морају бити парног степена јер се у њих уђе и из њих изађе. Дакле, сви чворови морају бити парног степена.

б) тај чвор је почетак али није крај пута и онда је непарног степена (из њега излазимо, ако се касније у њега вратимо морамо поново изаћи јер он није крајњи). То значи да је неки други чвор крајњи и из истог разлога он је непарног степена. Сви остали чворови морају бити парног степена јер се у њих уђе и из њих изађе. Дакле, два чвора морају бити непарног а сви остали парног степена.

Граф који посматрамо има 4 чвора и сви су непарног степена (три су степена 3 а један степена 5). Пошто се не уклапа ни у ситуацију а) ни у ситуацију б) значи да нема решења.

ЗАНИМЉИВОСТ: Да ли због Ојлера или не али у Кенигсбергу су у XVIII веку саградили још један мост тако да је проблем постао решив!

Данас се тај град зове Калињинград и део са мостовима изгледа овако

Да ли је проблем решив?

ПРОЈЕКАТ ЗА УЧЕНИКЕ

У следећој табели пронађи своје име и одговарајући град у Србији

Антовић Вук	Београд
Петровић Петар	Ваљево
Николић Страхиња	Врање
Ивановић Марина	Зајечар
Стојанић Лука	Зрењанин
Јеремић Лука	Јагодина
Шојић Алекса	Кикинда
Кнежевић Јован	Крагујевац
Кандић Милица	Краљево
Зарић Страхиња	Крушевац
Бјелаковић Богдан	Лесковац
Инђић Лазар	Неготин
Вучићевић Душан	Ниш
Протић Андрија	Нови Сад
Бјељић Стеван	Пирот
Стиковић Бисерка	Пожаревац
Перовић Јулија	Смедерево
Тешовић Сузана	Сомбор
Ристановић Матеја	Суботица
Милић Страхиња	Ужице
Милетић Милинко	Чачак
Петровић Маша	Шабац

На почетак рада стави мапу на којој се види тај град и његова околина тј. сва места која се користе у другом делу пројекта.

На основу података са мапе креирај повезан регуларан тежински граф који представља мрежу путева тог града и неколико суседних места. Граф треба да има бар 5 чворова и бар 5 ивица и не сме да садржи ниједан други град наведен у табели лево.

Истражи свако од коришћених места и направи кратак приказ у облику Power Point презентације.

На крају израчунати колико би вас коштало да обиђете сва места са графа који сте направили ако би путовали сами аутомобилом и ако би као група користили заједнички превоз.